

ESTIMAÇÃO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA NEBULOSA PARA SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

CARLOS CESAR TEIXEIRA FERREIRA*, GINALBER LUIZ DE OLIVEIRA SERRA*

**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA)*
Avenida Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, Cep: 65025-001
São Luís, Maranhão, Brazil

Emails: ccteixeira@ifma.edu.br, ginalber@ifma.edu.br

Abstract— A fuzzy methodology for fuzzy frequency response estimation of nonlinear dynamic systems is proposed in this paper. In terms of transfer function, the nonlinear dynamic system is approximated in the context of Linear Parameters Varying (LPV) systems and organized according to Takagi-Sugeno (TS) fuzzy structure. The proposal of this paper is to demonstrate, from a *Theorem*, that fuzzy frequency response is a boundary in the magnitude and phase of the Bode diagram. Low and high frequencies analysis of fuzzy dynamic model is obtained by varying the frequency ω from zero to infinity.

Keywords— Takagi-Sugeno fuzzy control, Nonlinear dynamic systems, Linear Parameters Varying (LPV) systems, Fuzzy frequency response.

Resumo— Uma metodologia nebulosa para a estimação da resposta em frequência de sistemas dinâmicos não-lineares é proposta nesse artigo. Em termos de função de transferência, o sistema dinâmico não-linear é aproximado no contexto de sistema Linear Variante nos Parâmetros (LVP) e organizado de acordo com uma estrutura nebulosa Takagi-Sugeno (TS). A proposta deste artigo é demonstrar, através de um *Teorema*, que a resposta em frequência nebulosa é um contorno nos gráficos de módulo e fase do diagrama de Bode. A análise em baixa e alta frequências do modelo dinâmico nebuloso é obtida através da variação da frequência ω de zero a infinito.

Palavras-Chave - Controle nebuloso Takagi-Sugeno, Sistemas dinâmicos não-lineares, Sistemas Lineares Variante nos Parâmetros (LVP), Resposta em frequência nebulosa.

1 Introdução

Atualmente, o projeto de sistemas de controle é estabelecido levando-se em consideração o aumento da competição, requisitos ambientais, custos de energia e materiais, sistemas robustos e tolerantes a falhas. Neste contexto, a análise e o projeto de controladores estão totalmente relacionados entre si. Na análise, o comportamento dinâmico do sistema de controle é objeto de estudo. No projeto, os controladores são obtidos para atender às características desejadas do sistema de controle a partir de certos critérios de desempenho. Geralmente, estes critérios de desempenho envolvem rejeição à perturbações, erros de regime permanente, características da resposta transitória e sensibilidade às mudanças paramétricas na planta (Franklin and Powell, 1986) (Phillips and Harbor, 1996) (Ioannou and Sun, 1947). Sinais testes de entrada são uma forma de analisar o comportamento e/ou desempenho de sistemas dinâmicos. Muitos sinais testes estão disponíveis na literatura, dentre os quais a forma de onda senoidal é largamente utilizada. A resposta de um sistema dinâmico a uma entrada senoidal apresenta uma forma de onda senoidal com amplitude e fase diferentes para uma dada frequência. Esta análise de resposta em frequência descreve como o sistema dinâmico responde a uma entrada qualquer considerando-se a variação da frequência e tem sido largamente utilizada na academia e na indústria. Os métodos de resposta em frequência foram

desenvolvidos no período entre 1930 e 1940 por Harry Nyquist (1889–1976) (Nyquist, 1932), Hendrik Bode (1905 – 1982) (Bode, 1940), Nathaniel B. Nichols (1914 – 1997) (Nichols et al., 1947). Desde então, tais métodos constituem-se uma ferramenta eficiente e indispensável na teoria de controle robusto (Schust, 1973) (Serra et al., 2009) (Monden et al., 2009) (Ferreira and Serra, 2009). Este artigo propõe a estimação da resposta em frequência nebulosa e sua aplicação na análise de sistemas dinâmicos não-lineares.

2 Formulação do Problema

O objetivo dessa seção é apresentar conceitos essenciais para a formulação e desenvolvimento da metodologia proposta neste artigo.

2.1 Sistema Linear Variante nos Parâmetros

Em termos de função de transferência, a forma geral de um sistema LVP apresenta a seguinte forma geral:

$$H(s, \nu) = \frac{Y(s, \nu)}{X(s)} = \frac{b_\alpha(\nu)s^\alpha + b_{\alpha-1}(\nu)s^{\alpha-1} + \dots + b_1(\nu)s + b_0(\nu)}{s^\beta + a_{\beta-1}(\nu)s^{\beta-1} + \dots + a_1(\nu)s + a_0(\nu)}, \quad (1)$$

onde: $H(s, \nu)$ é a função de transferência do sistema LVP; $X(s)$ e $Y(s, \nu)$ representam a entrada e a saída do sistema LVP, respectivamente; $a_*(\nu)$

e $b_*(\nu)$ são os parâmetros variantes; $\nu(t)$ é a variável de escalonamento variante no tempo; s é o operador de Laplace; α e β são as ordens do numerador e do denominador da função de transferência, respectivamente (com $\beta \geq \alpha$). A variável de escalonamento ν pertence a um conjunto compacto $\nu \in V$, com sua variação limitada por $|\dot{\nu}| \leq d^{\max}$, onde d é o limite superior, com $d^{\max} \geq 0$.

2.2 Modelo Dinâmico Nebuloso Takagi-Sugeno

O sistema de inferência TS, originalmente proposto em (Takagi and Sugeno, 1985), apresenta no consequente uma expressão dinâmica funcional das variáveis linguísticas do antecedente. A i -ésima regra, onde l representa o número de regras, é dada por

Regra⁽ⁱ⁾ :

SE \tilde{x}_1 é $F_{\{1,2,\dots,p_{\tilde{x}_1}\}}^i$ E ... E \tilde{x}_n é $F_{\{1,2,\dots,p_{\tilde{x}_n}\}}^i$

ENTÃO $y_i = f_i(\tilde{\mathbf{x}})$ (2)

onde o número total de regras é $l = p_{\tilde{x}_1} \times \dots \times p_{\tilde{x}_n}$. O vetor $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ contém as variáveis linguísticas do antecedente, onde T representa o operador para matriz transposta. Cada variável linguística tem seu próprio universo de discurso $\mathcal{U}_{\tilde{x}_1}, \dots, \mathcal{U}_{\tilde{x}_n}$, particionado por conjuntos nebulosos representando seus termos linguísticos, respectivamente. Na i -ésima regra, a variável $\tilde{x}_{\{1,2,\dots,n\}}$ pertence ao conjunto nebuloso $F_{\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i$ com um grau de pertinência $\mu_{F_{\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i}^i$ definido por uma função de pertinência $\mu_{\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$, com $\mu_{F_{\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i}^i \in \{\mu_{F_{1|\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i}^i}, \mu_{F_{2|\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i}^i}, \dots, \mu_{F_{p|\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i}^i}\}$, onde $p_{\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\}}^i$ é o número de partições do universo de discurso associado com a variável linguística $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$. A saída do modelo dinâmico TS é uma combinação convexa das expressões dinâmicas funcionais do consequente $f_i(\tilde{\mathbf{x}})$ que, sem perda de generalidade para o caso bidimensional, como ilustrado na Figura 1, é dada por

$$y(\tilde{\mathbf{x}}, \gamma) = \sum_{i=1}^l \gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3)$$

$y(\tilde{\mathbf{x}}, \gamma)$ é a saída do modelo nebuloso TS; onde γ é a variável de escalonamento do modelo dinâmico nebuloso TS. A variável de escalonamento, também conhecida como grau de ativação normalizado, é dada por:

$$\gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{h_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\sum_{r=1}^l h_r(\tilde{\mathbf{x}})}. \quad (4)$$

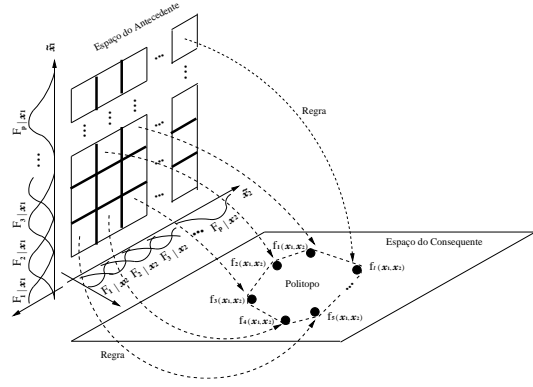


Figura 1: Modelo dinâmico nebuloso: um modelo TS pode ser considerado como um mapeamento do espaço do antecedente para o consequente.

onde $h_i(\tilde{\mathbf{x}})$ é o grau de ativação de cada regra. Esta normalização implica em:

$$\sum_{k=1}^l \gamma_k(\tilde{\mathbf{x}}) = 1. \quad (5)$$

Assim, o modelo dinâmico nebuloso TS, que representa qualquer sistema dinâmico não-linear, pode ser considerado como uma classe de sistemas onde $\gamma_i(\tilde{\mathbf{x}})$ denota uma decomposição de variáveis linguísticas $[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ para uma região geométrica politópica no espaço do consequente a partir das expressões funcionais $f_i(\tilde{\mathbf{x}})$.

3 Resposta em Frequência Nebulosa (RFN): Definição

A resposta de um modelo dinâmico nebuloso TS a uma entrada senoidal de frequência ω_1 , em amplitude e fase, define uma função de transferência nebulosa avaliada em $s = j\omega_1$, como ilustrado na Figura 2.

$$E(s) \longrightarrow \boxed{\tilde{W}(s) = \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Figura 2: Função de transferência nebulosa TS.

Para este modelo dinâmico nebuloso TS,

$$Y(s) = \left[\sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(s) \right] E(s). \quad (6)$$

Considerando-se $\tilde{W}(j\omega) = \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega)$ um número complexo para uma dada frequência ω , tem-se:

$$\tilde{W}(j\omega) = \left| \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \right| \angle \arctan \left[\sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \right]. \quad (7)$$

Para o caso em que a entrada $e(t)$ é senoidal, isto é,

$$e(t) = A \sin \omega_1 t, \quad (8)$$

a saída $y_{ss}(t)$, em regime permanente, é dada por:

$$y_{ss}(t) = A \left| \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \right| \sin [\omega_1 t + \phi(\omega_1)]. \quad (9)$$

Como resultado da definição de resposta em frequência nebulosa, apresentado nas Equações (6)-(9), é proposto o seguinte *Teorema*:

Theorem 1 *A resposta em frequência nebulosa é uma região no domínio da frequência, definida pelos sub-modelos do consequente e a partir das regiões de operação no espaço do antecedente.*

Proof: Seja $\tilde{\nu}$ uma variável linguística em função do ponto de operação ν . Esta, por sua vez, pode ser representada por termos linguísticos. Uma vez conhecido seus universos de discurso, como mostrado na Figura 3, os graus de ativação $h_i(\tilde{\nu})|^{i=1,2,\dots,l}$ são dados por:

$$h_i(\tilde{\nu}) = \mu_{F_{\tilde{\nu}_1^*}}^i \star \mu_{F_{\tilde{\nu}_2^*}}^i \star \dots \star \mu_{F_{\tilde{\nu}_n^*}}^i \quad (10)$$

onde $\tilde{\nu}_{\{1,2,\dots,n\}}^* \in \mathcal{U}_{\tilde{\nu}_{\{1,2,\dots,n\}}}$, respectivamente, \star é um operador lógico nebuloso.

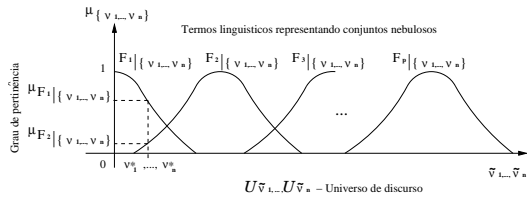


Figura 3: Descrição funcional das variáveis linguísticas: termos linguísticos, universo de discurso e graus de pertinência.

Dessa forma, os graus de ativação normalizados $\gamma_i(\tilde{\nu})|^{i=1,2,\dots,l}$ são dados por:

$$\gamma_i(\tilde{\nu}) = \frac{h_i(\tilde{\nu})}{\sum_{r=1}^l h_r(\tilde{\nu})}. \quad (11)$$

Esta normalização implica em:

$$\sum_{k=1}^l \gamma_k(\tilde{\nu}) = 1. \quad (12)$$

A saída do modelo dinâmico nebuloso TS é uma soma ponderada das expressões funcionais do

consequente, isto é, uma combinação linear das funções locais $f_i(\tilde{\nu})$, dada por

$$y(\tilde{\nu}) = \sum_{i=1}^l \gamma_i(\tilde{\nu}) f_i(\tilde{\nu}). \quad (13)$$

Seja $F(s)$ um espaço vetorial de funções de transferência com grau l e $f^1(s), f^2(s), \dots, f^l(s)$ funções de transferência que pertencem a base desse espaço vetorial. Uma função de transferência $f(s) \in F(s)$ deve ser uma combinação linear das funções de transferência $f^1(s), f^2(s), \dots, f^l(s)$. Assim:

$$f(s) = \xi_1 f^1(s) + \xi_2 f^2(s) + \dots + \xi_l f^l(s) \quad (14)$$

onde $\xi_{1,2,\dots,l}$ são os coeficientes da combinação linear. Se os coeficientes são normalizados, tem-se:

$$\left(\sum_{i=1}^l \xi_i = 1 \right). \quad (15)$$

Logo, o espaço vetorial $F(s)$ apresenta uma decomposição das funções de transferência $[f^1(s), f^2(s), \dots, f^l(s)]$ em uma região geométrica politópica. Os pontos da região geométrica politópica são definidos pelas funções de transferência $[f^1(s), f^2(s), \dots, f^l(s)]$. O modelo dinâmico nebuloso TS atende a esta propriedade politópica. Para definir os pontos desta região politópica nebulosa, cada regra do modelo dinâmico nebuloso deve ser ativada individualmente. Esta condição é conhecida como condição de contorno. Daí, os seguintes resultados são obtidos para a Resposta em Frequência Nebulosa (RFN) da função de transferência nebulosa:

- Se somente a regra 1 é ativada, tem-se ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0, \dots, \gamma_l = 0$). Então,

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| \sum_{i=1}^l \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right| \angle \arctan \left[\sum_{i=1}^l \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right], \quad (16)$$

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| 1W^1(j\omega) + 0W^2(j\omega) + \dots + 0W^l(j\omega) \right| \angle \arctan [1W^1(j\omega) + 0W^2(j\omega) + \dots + 0W^l(j\omega)], \quad (17)$$

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = |W^1(j\omega)| \angle \arctan [W^1(j\omega)]. \quad (18)$$

- Se somente a regra 2 é ativada, tem-se ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0, \dots, \gamma_l = 0$). Então,

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| \sum_{i=1}^l \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right| \angle \arctan \left[\sum_{i=1}^l \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right], \quad (19)$$

4 Resposta em Frequência Nebulosa (RFN): Análise

4.1 Análise em Baixas Frequências

A análise em baixas frequências do modelo dinâmico nebuloso TS, $\sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega)$, pode ser obtida por

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \quad (25)$$

Então, o comportamento do módulo e fase nas baixas frequências, é dado por

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \right| \angle \arctan \left[\sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \right] \quad (26)$$

4.2 Análise em Altas Frequências

Equivalentemente, a análise em altas frequências do modelo dinâmico nebuloso TS, $\sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega)$, pode ser obtido por

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \quad (27)$$

Então, o comportamento do módulo e fase nas altas frequências, é dado por

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \right| \angle \arctan \left[\sum_{i=1}^l \gamma_i W^i(j\omega) \right] \quad (28)$$

5 Resultados Computacionais

Considere o manipulador robótico de um braço, mostrado na Figura 5, com equação dinâmica dada pela Eq.29.

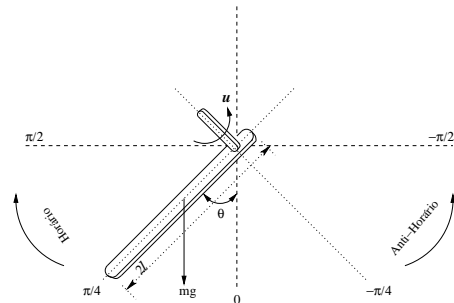


Figura 5: Manipulador robótico de um braço.

$$\bar{W}(j\omega, \bar{\nu}) = \left| 0W^1(j\omega) + 1W^2(j\omega) + \dots + 0W^l(j\omega) \right| \angle \arctan \left[0W^1(j\omega) + 1W^2(j\omega) + \dots + 0W^l(j\omega) \right], \quad (20)$$

$$\bar{W}(j\omega, \bar{\nu}) = |W^2(j\omega)| \angle \arctan [W^2(j\omega)]. \quad (21)$$

- Se somente a regra l é ativada, tem-se ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0, \dots, \gamma_l = 1$). Então,

$$\bar{W}(j\omega, \bar{\nu}) = \left| \sum_{i=1}^l \gamma_i(\bar{\nu}) W^i(j\omega) \right| \angle \arctan \left[\sum_{i=1}^l \gamma_i(\bar{\nu}) W^i(j\omega) \right], \quad (22)$$

$$\bar{W}(j\omega, \bar{\nu}) = \left| 0W^1(j\omega) + 0W^2(j\omega) + \dots + 1W^l(j\omega) \right| \angle \arctan \left[0W^1(j\omega) + 0W^2(j\omega) + \dots + 1W^l(j\omega) \right], \quad (23)$$

$$\bar{W}(j\omega, \bar{\nu}) = |W^l(j\omega)| \angle \arctan [W^l(j\omega)]. \quad (24)$$

Onde $W^1(j\omega), W^2(j\omega), \dots, W^l(j\omega)$ são os submodelos lineares do sistema dinâmico não-linear em função dos pontos de operação ν . Nota-se que $|W^1(j\omega)| \angle \arctan [W^1(j\omega)]$ e $|W^l(j\omega)| \angle \arctan [W^l(j\omega)]$ definem uma região de contorno. Sob tais circunstâncias, a resposta em frequência nebulosa para sistemas dinâmicos não-lineares converge para uma região no domínio da frequência. A Figura 4 mostra a resposta em frequência nebulosa para o caso bidimensional, sem perda de generalidade.

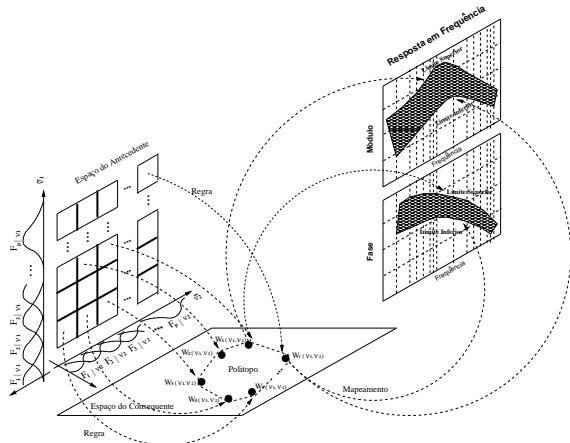


Figura 4: Resposta em frequência nebulosa: mapeamento do espaço do consequente para uma região no domínio da frequência.

□

$$ml^2\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u, \quad (29)$$

onde: $m = 1kg$ é a massa; $l = 1m$ é o comprimento do braço; $g = 9.81m/s^2$ é a constante gravitacional; $d = 1kgm^2/s$ é fator de amortecimento; u é a variável de controle (kgm^2/s^2).

Um modelo LVP pode ser obtido a partir do modelo não-linear da Equação (29), através da expansão em Série de Taylor (Franklin and Powell, 1986) da não-linearidade $\sin \theta$ em alguns pontos de operação. Assim, o modelo LVP do manipulador robótico é dado por:

$$ml^2\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl[a + b\theta] = u, \quad (30)$$

onde $a = \sin \nu - \nu \cos \nu$; $b = \cos \nu$ e ν é a variável de escalonamento que representa o ponto de operação (ângulo). Em termos de função de transferência, tem-se

$$H(s, \nu) = \frac{\Theta(s, \nu)}{U(s, \nu)} = \frac{1}{ml^2s^2 + ds + mgl \cos \nu}, \quad (31)$$

onde $U(s, \nu) = U(s) - mgl[\sin \nu - \nu \cos \nu]$. A partir do modelo LVP na Equação (31) e supondo-se a dinâmica do sistema no intervalo de $[-\pi/4, \pi/4]$, pode-se obter a base de regras do modelo dinâmico nebuloso TS como segue:

$$\begin{aligned} R^{(1)} : \text{SE } \nu \text{ é } -\frac{\pi}{4} \text{ ENTÃO } W^1(s, -\frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{s^2 + s + 6.9} \\ R^{(2)} : \text{SE } \nu \text{ é } 0 \text{ ENTÃO } W^2(s, 0) &= \frac{1.5}{s^2 + s + 9.8} \\ R^{(3)} : \text{SE } \nu \text{ é } \frac{\pi}{4} \text{ ENTÃO } W^3(s, \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{s^2 + s + 6.9} \end{aligned} \quad (32)$$

O modelo dinâmico nebuloso TS do manipulador robótico de um braço pode ser representado por:

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| \sum_{i=1}^3 \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right| \angle \arctan \left[\sum_{i=1}^3 \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right] \quad (33)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) &= \left| \frac{[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega)^2 + [\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega) + 9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \right| \\ &+ \frac{9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \left| \angle \arctan \left\{ \frac{[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega)^2 + [\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega) + 9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \right\} \right. \end{aligned} \quad (34)$$

onde:

$$\begin{aligned} Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]} &= (j\omega)^4 + 2(j\omega)^3 + 17.7467(j\omega)^2 + \\ &+ 16.7467(j\omega) + 68.0490 \end{aligned} \quad (35)$$

5.1 Análise em Baixas Frequências

A resposta em regime permanente a uma entrada senoidal, em baixas frequências, do modelo dinâmico nebuloso TS, pode ser obtida como segue:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) &= \left| \frac{[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega)^2 + [\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega) + 9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \right| \\ &+ \frac{9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \left| \angle \arctan \left\{ \frac{[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega)^2 + [\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega) + 9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \right\} \right. \end{aligned} \quad (36)$$

Quando ω tende a zero, Equação (36) pode ser aproximada como segue:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) &= \left| \frac{9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{68.0490} \right| \\ &\angle \arctan \left\{ \frac{9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{68.0490} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Daí,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = |0.1442\gamma_1 + 0.1019\gamma_2 + 0.1442\gamma_3| \angle 0^\circ \quad (38)$$

5.2 Análise em Altas Frequências

A resposta em regime permanente a uma entrada senoidal, em altas frequências, do modelo dinâmico nebuloso TS, pode ser obtida como segue:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) &= \left| \frac{[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega)^2 + [\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega) + 9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \right| \\ &+ \frac{9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \left| \angle \arctan \left\{ \frac{[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega)^2 + [\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3](j\omega) + 9.81\gamma_1 + 6.9367\gamma_2 + 9.81\gamma_3}{Den_{[\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu})]}} \right\} \right. \end{aligned} \quad (39)$$

Nesta análise, os termos de maior ordem da função de transferência no modelo dinâmico nebuloso TS aumentam mais rapidamente do que os outros termos à medida que ω cresce. Daí,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}{(j\omega)^2} \right| \angle \arctan \left\{ \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}{(j\omega)^2} \right\} \quad (40)$$

Então:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}{(j\omega)^2} \right| \angle -180^\circ \quad (41)$$

A Figura 6 mostra as características da resposta em frequência nebulosa para o manipulador robótico de um braço obtida através da metodologia proposta.

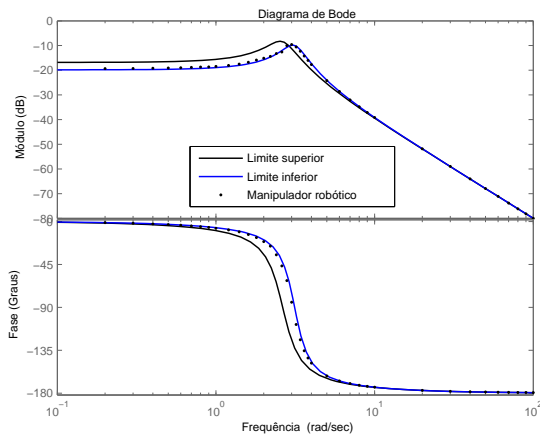


Figura 6: Características da resposta em frequência nebulosa do manipulador robótico de um braço.

6 Conclusões

A estimação da resposta em frequência nebulosa para sistemas dinâmicos não-lineares é proposta neste artigo. Mostra-se que a resposta em frequência nebulosa é uma região no domínio da frequência, definida por uma combinação linear dos sub-modelos $W^i(s)$, a partir das regiões de operação do sistema dinâmico não-linear, de acordo com o Teorema 1 proposto. Esta formulação é muito eficiente e pode ser utilizada para análise de estabilidade e projeto de controle robusto de sistemas dinâmicos não-lineares.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMA e à CAPES pelo suporte desta pesquisa.

Referências

Bode, H. W. (1940). Feedback amplifier design, *Bell Systems Technical Journal* **19**: 42.

Ferreira, C. C. T. and Serra, G. L. O. (2009). Takagi-sugeno fuzzy control method for non-linear systems, *8th IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*.

Franklin, G. F. and Powell, J. D. (1986). *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley.

Ioannou, P. A. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*, Vol. 1996, Prentice Hall.

Monden, T., Sato, T., Nabeshima, T. and Nishijima, K. (2009). Closed loop frequency response analysis method for circuit simulator, *International Conference on Power Electronics and Drive Systems*, pp. 1200–1204.

Nichols, N. B., James, H. M. and Phillips, R. S. (1947). *Theory of servomechanisms*, Vol. 25 of MIT Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill.

Nyquist, H. (1932). Regeneration theory, *Bell Systems Technical Journal*.

Phillips, C. L. and Harbor, R. D. (1996). *Feedback Control Systems*, Vol. 3, Prentice Hall.

Schust, J. A. P. (1973). Determination of aircraft response characteristics in approach/landing configuration for microwave landing system program, *Technical report*, Report FT-61R-73, Naval Air Test Center, Patuxent River, MD.

Serra, G. L. O., Ferreira, C. C. T. and Silva, J. A. (2009). Development method for a robust pid fuzzy controller of lpv systems, *IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems*, pp. 826–830.

Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. Syst. Man. Cyber*, Vol. 15, pp. 116–132.